Devoir surveillé 1

Consignes

- Cette épreuve contient **5 questions** équipondérées (durée : **1 h**)
- Calculatrice "collège" autorisée.
- Prière d'expliciter vos solutions et raisonnements.

Exercice 1

a) Ordonner les ensembles de nombres $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ du plus petit au plus grand en précisant leur nom.

$\mathbb{N}$: entiers naturels
$\mathbb{Z}$: entiers relatifs
$\mathbb{D}$: nombres décimaux
$\mathbb{Q}$: nombres rationnels
$\mathbb{R}$: nombres réels
$\mathbb{C}$: nombres complexes

b) Écrire sous forme de fraction le nombre dont le développement décimal est $0{,}123\overline{456}$.

Si $x = 0{,}123\overline{456}$, on a $1000x = 123{,}\overline{456}$ et $1\,000\,000x = 123\,456{,}\overline{456}$, donc

$$999\,000x = 1\,000\,000x - 1000x = 123\,456{,}\overline{456} - 123{,}\overline{456} = 123\,333$$

d'où

$$x = \frac{123\,333}{999\,000} = \frac{41\,111}{333\,000}.$$

Exercice 2

Simplifier au maximum les expressions suivantes.

a) $\sqrt{2}^{\log_2 9}$

3

b) $\log_2 3 \cdot \log_3 4$

2

c) $\log_6 4 + \log_6 9$

2

d) $\log_{\frac{1}{2}} e^{\ln 2}$

-1

Exercice 3

Vrai ou faux pour trois réels strictement positifs a, b, c ? Justifiez vos réponses.

a) $(a^b)^c = a^{b+c}$

Faux en général ! Par exemple pour $a = 2$, $b = c = 1$: $(a^b)^c = 2 \neq 4 = a^{b+c}$.

b) $(a \cdot b)^c = a^c \cdot b^c$

Vrai ! Propriété générale des exposants (intuitivement claire lorsque $c \in \mathbb{N}$).

c) Si a et b sont rationnels, alors a^b est rationnel.

Pas forcément : par exemple prendre $a = 2$, $b = \frac{1}{2}$

d) Si a et b sont irrationnels, alors a^b est irrationnel.

Pas forcément : par exemple prendre $a = e$, $b = \ln 2$

Exercice 4

a) Établir l'identité, pour $a, b > 0$ et $n \neq 0$: $\log_{a^n}(b) = \frac{1}{n}\log_a(b)$.

Le membre de gauche est l'(unique) exposant que l'on doit affecter à a^n pour obtenir b. Appelons y le membre de droite, et vérifions s'il a bien cette propriété :

$$(a^n)^y = a^{ny} = a^{\log_a b} = b.$$

On trouve donc en effet que $y = \log_{a^n} b$.

b) Déterminer toutes les valeurs de $x \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $e^x + e^{-x} = 1$.

En posant $X := e^x$, l'équation devient

$$X + \frac{1}{X} = 1,$$

soit, en multipliant tout par X :

$$X^2 + 1 = X.$$

En la mettant sous la forme $X^2 - X + 1 = 0$, on obtient une équation quadratique de discriminant

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

qui n'admet pas de solution réelle. Par conséquent, l'équation initiale n'admet aucune solution réelle.

Exercice 5

Le carbone 14 (^{14}C) est un isotope radioactif du carbone qui se retrouve naturellement en proportion infime (de l'ordre de 10^{-12}) dans tout tissu vivant. À la mort de l'organisme, cette proportion decroît de façon exponentielle.

a) Sachant que le temps de demi-vie (= durée nécessaire pour que la quantité présente soit réduite de moitié) du carbone 14 est d'environ 5730 ans, donner une formule pour la proportion de ^{14}C dans un organisme t années après sa mort.

En considérant que $t = 0$ au moment de la mort de l'organisme, la quantité $Q(t)$ de carbone 14 présente dans le tissu est de la forme

$$Q(t) = Q_0\, a^t$$

où Q_0 est la quantité initiale et a une constante à déterminer. On utilise pour cela le temps de demi-vie :

$$\frac{Q_0}{2} = Q(5730) = Q_0\, a^{5730}$$

qui nous dit que

$$a^{5730} = \frac{1}{2} \qquad \text{où} \qquad a = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{5730}} = 2^{-1/5730}$$

d'où en général

$$Q(t) = Q_0\, 2^{-t/5730} = 10^{-12} \cdot 2^{-t/5730}$$

b) On découvre un fossile dans lequel on mesure une proportion 10^{-42} de carbone 14.

Quel âge lui attribuez-vous ?

Si t désigne le nombre d'années depuis la mort de l'organisme, on a

$$10^{-42} = Q(t) = 10^{-12} \cdot 2^{-t/5730}$$

donc

$$10^{-30} = 2^{-t/5730}$$

soit

$$t = -5730 \cdot \log_2(10^{-30}) = 5730 \cdot 30 \cdot \log_2(10) \approx 571\,039 \text{ ans.}$$